Les racines nièmes d'un nombre complexe

- Recherche des racines carrées d'un nombre complexe u :

◦ Si u possède une écriture trigonométrique remarquable donc $u = re^{i\alpha}$ avec r est un réel positif, dans ce cas les racines carrées de u sont $u_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $u_1 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

◦ Si $u = a + ib$ (en général) alors pour trouver les racines carrées de u, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

- Soit $a = re^{i\alpha}$; r est un réel positif et α est un réel. Soit n un entier naturel non nul. Les racines nièmes de α sont les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ $z^n = a$,

Ce sont les $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$; $0 \le k \le n-1$.

- Les racines nièmes de l'unité sont les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ $u^n = 1$,

Ce sont les $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$; $0 \le k \le n-1$.

Vous pouvez voir des exemples traités dans les vidéos (cours complexe)

Exercice :

1/ Déterminer les racines cubiques de a= $2(-1+i)$

2/ Mettre ces solutions sous forme algébrique.

3/ En déduire les valeurs de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

Solution :

1/ $r = |2(1-i)| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \arg(2(1-i) = \frac{3\pi}{4}$, $n = 3$. Les racines cubiques de a sont les $z_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$; $0 \le k \le 2$.

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{4}}$

2/ $z_0 = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$ =1+i

$z_k^3 = z_0^3 \Rightarrow (\frac{z_k}{z_0})^3 = 1$ donc $\frac{z_k}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$; $0 \le k \le 2$ d'où

TuniSchool.tn